Von der Grafikkarte bis zum Lackierroboter

Aus dem Bundeswettbewerb »Jugend forscht«, der in diesem Jahr in der Stadthalle Bremerhaven ausgetragen wurde, bringen wir in diesem und dem folgenden Heft eine Auswahl von Arbeiten.

Von Christoph Pöppe

FORD-KREISE

Das Spiel fängt ganz harmlos an: Man setze zwei Kreise vom Radius 1/2 auf die Punkte 0 und 1 der reellen Geraden, so dass sie sich berühren, und fülle den dreieckigen Zwickel zwischen ihnen mit dem größtmöglichen Kreis. Zwischen der Geraden, dem neuen Kreis und jeweils einem alten bleiben wieder krummlinige Dreiecke übrig, die man abermals mit dem größtmöglichen Kreis füllt, und so weiter: ein Spezialfall einer apollonischen Kreispackung (Spektrum der Wissenschaft 11/2002, S. 116).

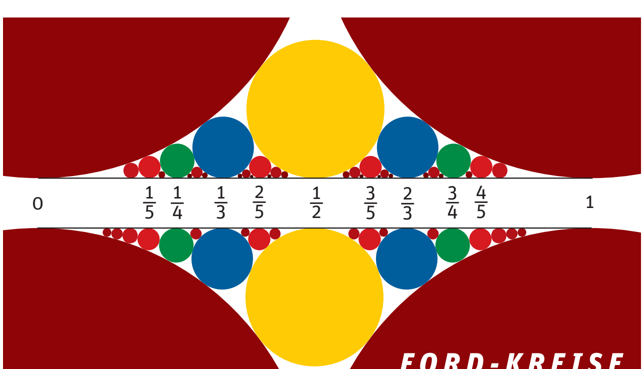
Der Punkt, an dem ein Kreis dieser unendlichen Folge die reelle Gerade berührt, entspricht stets einer rationalen Zahl. Mehr noch: Auf jeder rationalen Zahl p/q sitzt ein Kreis dieser Packung, und zwar mit dem Radius $1/(2q^2)$. Die Folge dieser so genannten Ford-Kreise, benannt nach dem amerikanischen Mathematiker Lester R. Ford (1886–1967), der sie 1938 entdeckte, ist also eine Abzählung der rationalen Zahlen, die im Gegensatz zur üblichen cantorschen Diagonalabzählung über etliche interessante Eigenschaften verfügt.

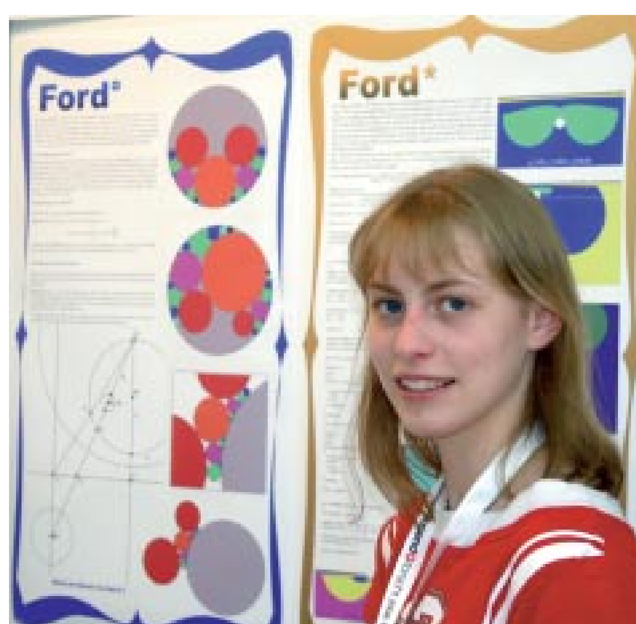
Da die Koordinaten der Ford-Kreise nach einer einfachen Regel errechenbar sind, lassen sich jede Menge Fragen dazu mit hinreichend Scharfsinn explizit beantworten: Die Folge der Zähler und die der Nenner bestehen wie ein Rondo in der Musik aus immer wiederkehrenden Motiven. Man kann angeben, bei welchem Schritt der Konstruktion eine bestimmte rationale Zahl erstmals auftaucht. Im Lauf der Untersuchung treten sämtliche üblichen Verdächtigen aus der Zahlentheorie auf: Euklids Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers, Kettenbrüche, Fibonacci-Zahlen, die Funktion, welche die Anzahl der Teiler einer Zahl angibt, bis hin zur berüchtigten riemannschen Zetafunktion, von der die immer noch ungelöste riemannsche Vermutung handelt.

Jessica Fintzen (19) aus Quickborn, Malte Lackmann (17) aus Bordesholm und Andreas Decker (19) aus Vechta kennen sich nicht, wie üblich, von einer gemeinsamen Schule, sondern vom internationalen Mathematikwettbewerb »Baltic Way« 2006. Gemeinsam haben sie nicht nur die – bisher nur spärlich dokumentierte – Theorie der Ford-Kreise erarbeitet, sondern sie auch in die verschiedensten Richtungen verallgemeinert. So betrachteten sie den Fall, dass die beiden Urkreise die reelle Gerade nicht berühren oder die Gerade durch einen Kreis ersetzt wird. Es war vor allem die Fülle der Ergebnisse und die geradezu professionelle Darstellung, die dem Dreierteam den 1. Preis im Fach Mathematik/Informatik eingebracht hat.

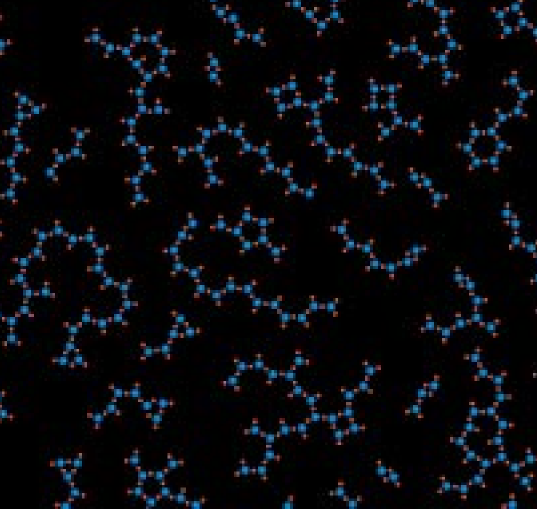
Auch sonst sind die Preisträger wissenschaftlich nicht unterbeschäftigt: Jessica Fintzen und Malte Lackmann haben

Man setze auf die rationalen Zahlen p/q zwischen 0 und 1 Kreise mit dem Radius $1/(2q^2)$. Einerlei ob man nach der Konstruktion von Ford stets zwischen zwei bestehende Kreise den größtmöglichen dritten einfügt (unten, obere Bildhälfte) oder schlicht alle rationalen Zahlen mit Nenner unterhalb einer gewissen Schranke, hier 8, mit Kreisen versieht (unten) – im Grenzwert erreicht man stets alle rationalen Zahlen. Jessica Fintzen (rechts) und ihre Mitstreiter haben dieses Verfahren in viele Richtungen verallgemeinert.





BEIDE ABBILDUNGEN: CHRISTOPH PÖPPE



BEIDE ABBILDUNGEN: HEIKO BURAU

Auf der Grafikkarte von Heiko Buraus PC laufen mit hoher Geschwindigkeit Simulationen von zu Eis gefrierenden Wassermolekülen (links) und von strömendem Gas samt Wirbelbildung.

sich für die Teilnahme an der Internationalen Mathematik-Olympiade dieses Jahres in Madrid qualifiziert, Jessica Fintzen darüber hinaus für die Internationale Physik-Olympiade in Hanoi.

RECHNEN MIT DER GRAFIKKARTE

In einem Computerspiel sind die Oberflächen aller Figuren und Requisiten aus lauter kleinen Dreiecken zusammengesetzt. Hat der Computer zu einem gewissen Zeitpunkt deren Positionen bis aufs letzte Dreieck genau berechnet, dann ist das aktuelle Bild im Wesentlichen fertig – sollte man meinen. Aber der aufwändigste Teil der Bildberechnung kommt erst noch. Für jeden der etwa eine Million Bildpunkte (»Pixel«) muss bestimmt werden, welches Dreieck an dieser Stelle vom Betrachter aus gesehen zuvorderst liegt und daher sichtbar ist, und dieses Dreieck muss mit der Musterung (»Textur«) überzogen werden, die zu seiner Oberfläche gehört. Diese Arbeit erledigt in modernen PCs die Grafikkarte, früher ein relativ langweiliger Zwischenspeicher für Bilddaten, heute ein Computer im Computer, der über mehr Rechenkapazität verfügt als der zentrale Prozessor, diese aber nur für sehr spezielle Zwecke einsetzt.

Heiko Burau (19) aus Münstereifel kam – nicht als Erster, wie er später enttäuscht feststellen musste – auf die Idee, die Grafikkarte für ebenso spezielle Zwecke zweckzuentfremden: für Simulationen physikalischer Vorgänge, insbesondere Strömungsphänomene. Dafür pflegen die professionellen Rechner schweres Geschütz aufzufahren: eine nichtlineare partielle Differenzialgleichung namens Navier-Stokes-Gleichung und zahllose raffinierte Verfahren zu deren näherungsweiser Lösung (Spektrum der Wissenschaft 7/1996, S. 72).

Eine sehr spezielle Näherung – ungeeignet für eine naturgetreue Simulation, aber ausreichend für eine qualitative Wiedergabe – reduziert die Rechenarbeit im Wesentlichen auf zwei Operationen: Bilde einen Mittelwert über alle unmittelbaren Nachbarn eines Bildpunkts, um die ausgleichende Wirkung der inneren Reibung zu berücksichtigen (den »Diffusionsterm«); und interpoliere zwischen den Werten zweier Punkte zur Wiedergabe von Transportvorgängen. Genau das kann eine Grafikkarte sehr elegant. Eigentlich mittelt und interpoliert sie Farbwerte zur Texturberechnung; aber durch raffinierte Programmierung lässt sie sich diesem Zweck willig entfremden. So gelingen Heiko Burau Simulationen mit einer Geschwindigkeit, die mit dem zentralen Prozessor nicht zu erreichen wäre.

Neuere Grafikkarten lassen sich noch erheblich freier programmieren. Mit ihnen konnte der Jungforscher seine Ideen auf weitere physikalische Phänomene erweitern. Auf seinem Bildschirm pflanzen sich Wellen fort, brechen sich an Hindernissen und interferieren miteinander; zahlreiche Wassermoleküle flitzen umher, lagern sich aneinander und kommen bis auf ein bisschen Gezappel zur Ruhe, wenn die fiktive Temperatur im System unter den Gefrierpunkt fällt (Bild oben).

GRAPHENE

Heikos Schule, das St.-Michael-Gymnasium in Münstereifel, hat noch ein weiteres Team bis in den Bundeswettbewerb gebracht: Tobias Kaufmann (15), Luca Banszerus (16) und Michael Schmitz (16) gelang es, Kohlenstoffschichten herzustellen, die genau eine Atomlage dick sind: »Graphen«, mit Betonung auf dem e. Die technischen Mittel sind eines Schülerwettbewerbs wahrhaft würdig: Die Knaben drücken Tesafilm auf ein Stück Grafit, ziehen ihn wieder ab und kleben ihn samt anhaftenden Partikeln auf ein Siliziumscheibchen. Der weniger triviale Teil der Aktion bestand darin, unterm Mikroskop diejenigen Kohlenstoffflöckchen ausfindig zu machen, die tatsächlich nur eine Atomlage dick waren. Dafür gab es den Preis der Bundeskanzlerin »für die originellste Arbeit«.

CHRISTOPH PÖPPE

Felix Risch (19; abgebildet) aus Landau und Maximilian Klein (19) aus Edenkoben erreichen mittels Helmholtz-Spulen und sorgfältig austariertem Permanentmagneten Rekordlaufzeiten für den kleinen Magnetkreisel (das »Levitron«).

NILS BECKER

Die Mandelbrot-Menge für die Iteration $z \to z^{-2}+c$ erstreckt sich bis ins Unendliche; das chaotische Verhalten ist auf das Innere des krummlinig begrenzten Dreiecks beschränkt.

VERALLGEMEINERTE APFELMÄNNCHEN

Ein Floh springt nach einer festgelegten Vorschrift über die Ebene. In dem Punkt, an dem er sich gerade befindet, findet er durch Anwendung einer einfachen Formel den Zielpunkt seines nächsten Sprungs. Und doch ist sein Verhalten möglicherweise völlig chaotisch. Die Aufzeichnung seiner Bewegungen liefert ein Fraktal, und aus einem Katalog aller Flöhe entsteht die berühmte Mandelbrot-Menge. Seit fast dreißig Jahren wird sie nun von Mathematikern und vor allem von Computerkünstlern studiert – und siehe da, es gibt immer noch Neues zu entdecken.

Nils Becker (17) aus Königstein (Taunus) hat zunächst nichts weiter getan als ein Vorzeichen umgedreht. Die klassische Iterations-(Flohsprung-)Formel für die Mandelbrot-Menge lautet $z \to z^2+c$, wobei z und c als komplexe Zahlen aufzufassen sind. Setzt man z^3, z^4, …, z^k an die Stelle von z^2, so wird aus dem vertrauten Apfelmännchen eine zwei-, drei-, … $(k-1)$-zählig symmetrische, ebenso stachlige Figur. Aber wenn der Exponent negativ wird? Dann bricht an der Theorie einiges zusammen und muss durch Neues ersetzt werden.

Beim klassischen Apfelmännchen weiß man: Wenn der Floh über eine gewisse Entfernung vom Nullpunkt hinausspringt, kommt er nie wieder zurück. Aber für große z ist zum Beispiel z^{-4} sehr klein; ein Floh, der weit nach draußen gerät, wird von der Iterationsfunktion immer wieder in die Nähe des Punktes c zurückgeholt. Deswegen ist die übliche Definition der Mandelbrot-Menge als »alle Flöhe, die nicht irgendwann ins Unendliche verschwinden«, was mit einer schlichten Ungleichung nachprüfbar ist, nicht mehr brauchbar. An ihre Stelle tritt die Formulierung »alle Flöhe, die sich auf die Dauer zu einem regelmäßigen (periodischen) Verhalten bequemen«. Diese Bedingung mit dem Computer nachzuprüfen ist schwieriger.

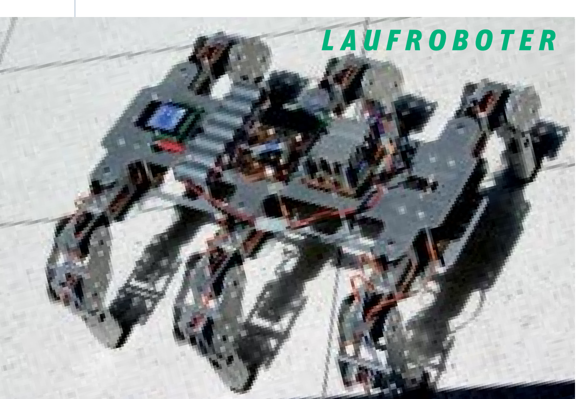
Theoretisch liefert der so genannte Ljapunow-Exponent (Spektrum der Wissenschaft 4/1995, S. 66) das gesuchte Kriterium. Aber das ist so etwas wie ein Mittelwert über unendlich viele Zahlen – eine pro Flohsprung. Nils Becker hat eine numerisch effiziente Näherung für den Ljapunow-Exponenten gefunden und damit eine neue Methode zur Erzeugung unkonventioneller Fraktalbilder. Diese Leistung und einige Anwendungen seines Programms honorierte die Jury mit einem 4. Preis.

LAUFROBOTER

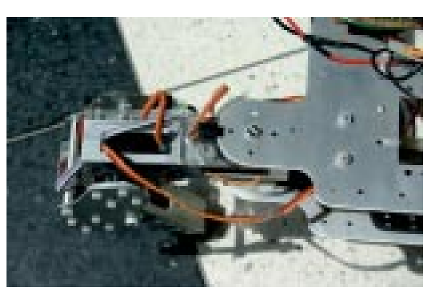
Man erlebt es zuweilen beim Aufstehen nach einem besonders sportlichen Tag – oder nach durchzechter Nacht: Die Beine sind kürzer und der Kopf dicker als gewohnt, und erst nach ein paar torkeligen Schritten stellt sich das gewohnte Körpergefühl wieder ein. Ein Regelkreis innerhalb unseres Nervensystems hat die Kraft, die aufzuwenden ist, um eine bestimmte Bewegung auszuführen, wieder in Einklang mit der Realität gebracht.

So ähnlich geht es auch dem sechsbeinigen Laufroboter von Matthias Schnaubelt (18) aus Zwingenberg (Hessen). Wie bei Insekten üblich, marschieren das linke Vorder-, das rechte Mittel- und das linke Hinterbein einerseits, die drei restlichen Beine andererseits jeweils im Gleichtakt. Drucksensoren in den Gummifüßen geben ihm ein Gefühl dafür, welcher Anteil seines Gewichts auf welchem Fuß lastet und wie matschig der Untergrund ist. Vor allem aber: Über kleine, transparente, mit einem Streifenmuster versehene Scheibchen, die sich – zum Beispiel – mit den Oberschenkeln mitdrehen und mit Lichtquelle und Fotozelle abgelesen werden (Bilder links unten), erfährt er, welche Wirkung eine Aktion des zugehörigen Stellmotors (der »Beinmuskulatur«) tatsächlich hat, und gewinnt daraus das für einen sicheren Gang unerlässliche Körpergefühl. Dafür gab es den 2. Preis im Fach Technik.

Der 1. Preis ging an Thomas Nesch (19). Der Auszubildende bei Daimler in Stuttgart hat einen Sensor entwickelt, der Lackierroboter vor »inneren Blutungen« warnt. Mehrere Lackkomponenten strömen zur Spritzdüse durch Schläuche im Arm des Roboters, die durch die vielen Handbewegungen stark beansprucht werden. Ein unbemerktes Leck im Schlauch verursacht teure Produktionsausfälle. Ein elektrischer Sensor war wegen der elektrostatischen Aufladung der zu lackierenden Teile nicht einsetzbar. Thomas Nesch gelang es, Flüssigkeiten, auch transparente, in sehr kleinen Mengen mit optischen Mitteln nachzuweisen. ◁



BEIDE FOTOS: CHRISTOPH PÖPPE



Körpergefühl mit Fotozelle: Durch Selbstbeobachtung findet der sechsbeinige Laufroboter von Matthias Schnaubelt den richtigen Kraftaufwand für eine geplante Bewegung.

AUTOR

Christoph Pöppe ist Redakteur bei »Spektrum der Wissenschaft«.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/958137.